PROBLÈME 3

Partie I - Préliminaires

Q24. Justifier que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Q25. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q26. En déduire que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q27. En déduire que pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est convergente.

Pour la suite, on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ et on note $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

Q28. Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

Q29. Montrer que pour tout p élément de $\mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$.

Q30. Montrer que pour tout p appartenant à $\mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

Partie II - Recherche des extrema

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - x)^2 (t - y)^2 e^{-t^2} dt$.

Q31. Montrer que pour tout (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

Q32. Calculer les dérivées partielles premières de F et en déduire les trois points critiques de F.

Q33. Calculer pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $F(x, x) - F(0, 0)$ et $F(x, -x) - F(0, 0)$.

Q34. Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local ?

Partie III - Intégrale dépendant d'un paramètre

Q35. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent.

Pour la suite, on note $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$ et $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}dt$.

Q36. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral sans oublier les hypothèses.

Q37. En appliquant la formule précédente à la fonction sin, montrer que pour tout (λ, a) éléments de $\mathbb{R}^2$, $|\sin(\lambda + a) - \sin(a) - \lambda\cos(a)| \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$.

Q38. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0$.

Q39. En déduire que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Q40. Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$ (on pourra effectuer une intégration par partie).

Q41. Donner une équation différentielle dont S est solution sur $\mathbb{R}$.

Q42. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $S(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}dt$.

FIN